ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

"*L'asservissement ne dégrade pas seulement l'être qui en est victime, mais celui qui en bénéficie*", citation extraite du livre Le Harem et les cousins, 1966, écrit par Germaine Tillion, 1907-2008, résistante et ethnologue spécialiste du Maghreb.
Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 2

La croissance économique à tout prix : est-ce une impasse ou notre avenir ?
Vous argumenterez votre point de vue.

Sujet n° 3

Doit-on craindre la liberté ? Expliquez et illustrez vos propos.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier l'existence de solutions à des systèmes différentiels. Les parties sont complètement indépendantes. La partie I traite de l'existence de solutions pour des systèmes linéaires. La partie II traite de l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires. Enfin la partie III étudie un système non-linéaire d'équations différentielles proposé par Lotka et Volterra pour l'étude des populations d'espèces animales.

Partie I

1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -t$$

telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

3. Soit f la fonction définie par
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & tx \end{array}.$$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant $y(0) = \alpha$.

4. Sans chercher à la calculer explicitement, montrer que, pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution au système différentiel suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -z \\ z' & = & y - x + z \end{array} \right. \qquad \text{vérifiant} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right. .$$

5. Calculer une solution explicite au système différentiel précédent pour un triplet de données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les données initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que le système différentiel précédent n'admette que des solutions périodiques.

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence de solutions pour des systèmes non-linéaires posés sous la forme d'un problème de Cauchy. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne de constante de Lipschitz $L \in \mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

7. Montrer que si f est globalement lipschitzienne, alors la constante
$$L_f := \inf\{L \in \mathbb{R} : \forall\, x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$
existe.

8. Montrer que f est lipschitzienne pour la constante de Lipschitz L_f.

9. Montrer que la fonction suivante est globalement lipschitzienne :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin(x))^3 \end{array}.$$

10. Trouver le maximum et le minimum de
$$G : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy^2 \end{array}$$
sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

11. En déduire la plus petite constante de Lipschitz de f.

12. Montrer qu'il existe des solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & (\sin(y))^3 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z' & = & (\sin(z))^3 \\ z(0) & = & \pi \end{array}\right. .$$

13. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$0 < y(t) < \pi.$$

14. Montrer que la solution y du premier problème vérifie pour tout $t \geq 0$

$$y'(t) \leq L_f \ (\pi - y(t)).$$

Partie III

On fixe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ strictement positives et on considère des données initiales (x_0, y_0) dans le quadrant $Q := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\} = \mathbb{R}_+^2$. On appelle système de Lotka-Volterra, le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) & = & -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \\ x(0) & = & x_0, \\ y(0) & = & y_0. \end{array}\right.$$

On admet que ce système admet une unique solution (x,y), définie sur $\mathbb{R}$. De plus on admet que si deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) & = & -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{array}\right.$$

coïncident en un temps $t_0 \in \mathbb{R}$ alors elles sont égales.

15. Montrer que si (x,y) est une solution de donnée initiale $(x_0, y_0) \in Q$, on a $(x(t), y(t)) \in Q$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Indication : Pour ce faire, on pourra considérer le premier instant $t^* \geq 0$ pour lequel $y(t^*) = 0$ (ou de manière symétrique $x(t^*) = 0$), et étudier les solutions qui partent de données initiales situées sur les axes des ordonnées ou des abscisses.

16. Toujours dans le quadrant $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0\}$, trouver les points stationnaires, c'est-à-dire les points $(x^*, y^*) \in Q$ tels que les solutions $(x(t), y(t))$ de données initiales (x^*, y^*) restent constantes.

17. Calculer la différentielle de l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix} \end{array} .$$

18. Calculer les valeurs propres de la matrice représentant la différentielle aux points stationnaires trouvés à la question 16.

19. On pose V la fonction, définie sur $\mathring{Q} := (\mathbb{R}_+^*)^2$, telle que

$$V : \begin{array}{ccc} \mathring{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y). \end{array}$$

Montrer que la fonction V est constante le long des trajectoires qui sont solutions du système différentiel de Lotka-Volterra avec des données initiales $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

20. Soit $(x_0, y_0) \in \mathring{Q}$ tel que $\beta y_0 \neq \alpha$. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in \mathcal{U}$, et un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathring{Q}$ tel que $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, tels que l'ensemble

$$V_0 := \{(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : V(a,b) = V(x_0,y_0)\}$$

vérifie

$$\Big[(a,b) \in \mathcal{O} \text{ et } (a,b) \in V_0\Big] \Leftrightarrow \Big[a \in \mathcal{U} \text{ et } b = \phi(a)\Big].$$

21. Calculer la différentielle de ϕ au point x_0.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des idéaux d'anneaux tels que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\imath]$ et $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. La première partie détaille la structure d'anneau de $\mathbb{Z}[\imath]$. La deuxième partie s'intéresse à certains idéaux particuliers de $\mathbb{Z}$. La troisième partie s'intéresse aux idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et le lien avec les endomorphismes.

On rappelle qu'un nombre $p \in \mathbb{N}$ est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ qui sont donc nécessairement 1 et p. Les nombres 0, 1, 4 et 6 ne sont donc pas des nombres premiers, alors que 2, 3 et 5 le sont. L'ensemble $\mathbb{Z}[\imath]$ est défini par

$$\mathbb{Z}[\imath] = \left\{a + b\, i\sqrt{5} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X construit sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}[X] = \left\{\sum_{k=0}^{p} z_k X^k : p \in \mathbb{N}, (z_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{K}^{p+1}\right\}$$

et pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_p[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à p.

Soit un entier naturel $d \in \mathbb{N}$, on note $End(\mathbb{K}^d)$ l'ensemble des endomorphismes sur $\mathbb{K}^d$. Pour un entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on note f^p l'application $f \circ \cdots \circ f$ composée p fois avec la convention $f^0 = Id_{\mathbb{K}^d}$. Et pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f)$ l'application $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} z_k f^k$.

Partie I

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\imath]$ possède une structure naturelle d'anneau pour les lois usuelles.

2. Montrer qu'on peut représenter un élément $x \in \mathbb{Z}[\imath]$ par un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\imath] & \to & \mathbb{Z}^2 \\ x & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

   est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}[\imath], +, \times)$ dans $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \otimes)$. On précisera les lois $\oplus$ et $\otimes$ s'il y a lieu.

3. Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux.

4. Montrer que $\mathbb{Z}[\imath]$ n'est pas un corps.

5. Montrer qu'il existe une matrice carrée M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[\imath])$ (on précisera les valeurs des 4 coefficients $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ et $M_{2,2}$) telle que pour tous $(x, y) \in \mathbb{Z}[\imath]^2$

$$x \times y = \phi(x) M \phi(y)^T,$$

   où les opérations de multiplications du membre de droite sont les opérations naturelles de multiplication matrice/vecteur.

6. Grâce à la matrice M, on construit l'application suivante :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, y_1, y_2) & \mapsto & M_{1,1}x_1y_1 + M_{1,2}x_2y_1 + M_{2,1}x_1y_2 + M_{2,2}x_2y_2. \end{array}$$

   Montrer que cette application est une forme bilinéaire.

7. Montrer qu'il existe une forme quadratique $q : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $(x, y) \in (\mathbb{K}^2)^2$

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right).$$

8. Montrer que, par analogie avec la construction de Ψ et q sur $\mathbb{K}^2$, on peut définir une application $\overline{\Psi} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\imath]$ et une application $\overline{q} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\imath]$ telles que pour tous $(x, y) \in \mathbb{Z}[\imath]^2$

$$\overline{q}(\phi(x + y)) - \overline{q}(\phi(x - y)) = \phi(2x) M \phi(2y)^T = (2x) \times (2y) = 4\overline{\Psi}(\phi(x), \phi(y)).$$

Partie II

Pour un anneau quelconque $(\mathbb{A}, +, \times)$, on définit pour tout $a \in \mathbb{A}$ l'ensemble

$$a\mathbb{A} = \{c \in \mathbb{A} : \exists\ b \in \mathbb{A} \text{ tel que } c = a \times b\}.$$

Pour $c \in \mathbb{A}$, on dira qu'un ensemble $c\mathbb{A}$ est indécomposable :

— s'il est différent des deux ensembles triviaux $\{0_{\mathbb{A}}\}$ et $\mathbb{A}$,
— s'il vérifie la propriété (P) suivante :

$$\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{A}, \text{ si } a \times b \in c\mathbb{A}, \text{ alors } a \in c\mathbb{A} \text{ ou } b \in c\mathbb{A}. \tag{P}$$

10. Montrer que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

11. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors l'ensemble suivant est un idéal de $\mathbb{A}$:
$$I \cap J := \{a \in \mathbb{A} : a \in I \text{ et } a \in J\}.$$

12. Montrer que pour tout nombre premier $p \in \mathbb{N}$, l'idéal $p\mathbb{Z}$ est indécomposable.

13. Montrer que $6\mathbb{Z}$ ne vérifie pas la propriété (P), c'est-à-dire qu'il est "décomposable".

14. Trouver deux idéaux I et J indécomposables tels que
$$I \cap J = 6\mathbb{Z}.$$

15. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ vérifiant tous la propriété (P) tels que
$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

16. Montrer que l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie. C'est-à-dire qu'il existe un idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$ tel que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et toute famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ telle que
$$n\mathbb{Z} \subset \bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$
il existe $m \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$ tel que n ne divise pas m.

La notion de décomposables n'étant pas compatibles avec l'intersection, on cherche une autre manière de décomposer un idéal. On va montrer que cette notion est liée à ce qu'on appelle les nombres premiers.

17. Montrer que pour deux idéaux I et J de $\mathbb{A}$, alors les deux ensembles suivants sont aussi des idéaux de $\mathbb{A}$:

— $IJ := \left\{c \in \mathbb{A} : \exists k \in \mathbb{N}^*, a_1, \ldots, a_k \in I, b_1, \ldots, b_k \in J \text{ tels que } c = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j \times b_j\right\}$
— $I + J := \{c \in \mathbb{A} : \exists\ i \in I \text{ et } j \in J \text{ tels que } c = i + j\}$.

18. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que

$$IJ = 6\mathbb{Z}.$$

On dit qu'on a trouvé une décomposition de l'idéal $6\mathbb{Z}$ en deux idéaux indécomposables.

19. Montrer que pour tout idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ avec $n \neq -1, 0, 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une famille finie d'idéaux indécomposables $p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_k\mathbb{Z}$ tels que

$$n\mathbb{Z} = \prod_{j=1}^{k} p_j\mathbb{Z}$$

20. Trouver deux idéaux I et J de $\mathbb{Z}$ indécomposables tels que

$$I + J = \mathbb{Z}.$$

Partie III

21. Soit $P(x) \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X)\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

22. Montrer que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivent sous la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$.

23. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

24. Caractériser les idéaux de la forme $P(X)\mathbb{K}[X]$ qui sont indécomposables pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

25. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^d$. Montrer que l'ensemble des polynômes qui annulent l'endomorphisme f, c'est-à-dire

$$Annul(f) := \{P(X) \in \mathbb{K}[X] : P(f) \text{ est l'endomorphisme identiquement nul}\},$$

est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$.

26. On pose $\Phi_f : \mathbb{K}[X] \to End(\mathbb{K}^d)$ l'application qui a un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(f) \in End(\mathbb{K}^d)$. Montrer que Φ_f est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ vers $(End(\mathbb{K}^d), +, \circ)$.

27. Montrer que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ le noyau de $\Phi_f(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^d$ stable par l'endomorphisme f.

28. On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme f le polynôme de $Annul(f)$ de plus petit degré $p \in \mathbb{N}$, dont le coefficient de plus haut degré $z_p = 1$. Montrer qu'un tel polynôme minimal existe, et qu'il est de plus unique.

29. Soit M_f la matrice représentant un endomorphisme $f \in End(\mathbb{K}^d)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de polynôme minimal $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}$. On admet que M_f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal $P(X)$ est scindé à racines simples. Dans ce cas, il existe des polynômes $(P_k(X))_{1 \leq k \leq p}$, non réduits à des constantes et de degré 1, tels que $P(X) = \prod_{k=1}^{p} P_k(X)$. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, les idéaux $I_k := P_k(X)\mathbb{K}[X]$ sont indécomposables, que pour tout $Q \in I_k$

$$Ker(\Phi_f(P_k)) \subset Ker(\Phi_f(Q))$$

et que

$$Ker(\Phi_f(P_k)) \bigoplus Ker(\Phi_f(P_m))$$

pour tout $1 \leq m \leq p$ avec $m \neq k$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A (noté $Ker\ A$) et de l'image de A (notée $\operatorname{Im} A$).

2. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à A ?

3. Calculer A^n, pour tout $n \in N$.

4. Soit la matrice B définie par : $B = 2A - I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 4.
- Calculer B^n, pour tout $n \in N$.
- Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme associé à B ?

Exercice n° 2

Soient u et v deux endomorphismes de R^n de matrices respectives A et B dans la base canonique de R^n. On considère l'endomorphisme w de R^{2n} dont la matrice dans la base canonique de R^{2n} s'écrit par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

1. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}$, où I désigne la matrice unité d'ordre n.

- Exprimer le déterminant $\det w$ en fonction de $\det(u+v)$ et $\det(u-v)$.
- Donner une relation de même type pour le polynôme caractéristique de w.

2. On suppose que u et v sont diagonalisables dans R^n et que de plus $uov = vou$.
Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à u et v.

3. On suppose toujours que u et v sont diagonalisables dans R^n tels que $uov = vou$.
- Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonalisables.
- Montrer que w est diagonalisable.

4. Soit $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

- Diagonaliser M.
- On pose $A = I + M$ et $B = M^4$. La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 3

Soit l'équation générale du troisième degré de la forme :

$$(1)\quad u^3 + au^2 + bu + c = 0$$

où a, b, c sont des paramètres réels.

1. En posant $u=x+h$, déterminer la valeur de h pour que l'équation (1) soit équivalente à l'équation suivante (on explicitera p et q) :

$$(2)\quad x^3 + px + q = 0.$$

2. On cherche à résoudre l'équation (2) en posant : $x = y + z$ et $3yz + p = 0$ (y et z sont deux autres inconnues). Trouver une équation équivalente à (2) en fonction de y et z.

3. Montrer que y^3 et z^3 sont des solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

4. Résoudre dans C (ensemble des nombres complexes), l'équation :

$$8u^3 - 12u^2 - 18u + 19 = 0$$

Exercice n° 4

On note E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle trois fois dérivables et

$$F = \left\{ f \in E \,/\, f(x) = f^{(3)}(x) - 3f^{(2)}(x) + 3f^{'}(x) \ \ \forall x \in R \right\}.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in F$ à partir de la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

2. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de E et trouver une base de F.

3. Montrer que si $f \in F$, alors sa dérivée $f^{'} \in F$.

4. Soit $D : F \to F$ définie par : $D(f) = f^{'}$.

- Expliciter la matrice de D dans la base trouvée à la question 2.
- Déterminer l'inverse de D si cette matrice existe.
- Calculer $D^n \quad \forall n \in N^*$.

Exercice n° 5

On considère la fonction $f : R^2 \to R^2$ définie par :

$f(x,y) = \dfrac{x^n}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$, où n est un entier naturel non nul.

1. Etudier la continuité de *f*.

2. Etudier la différentiabilité de *f* en (0, 0).

3. Pour x>0 et n>3, on pose $I_x = \int_1^2 f(x,y)\,dy$. Expliciter I_x.

Exercice n° 6

On considère la fonction $f : R \to R$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} Arctg\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}} Ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0, x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de *f*.

2. La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? en -1 ?

3. Montrer que pour $|x| < 1$, *f(x)* est la somme d'une série entière. Soit $a_n x^n$ le terme général de cette série, préciser a_n en fonction de n.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après, de Sabine Cessou, est un article publié dans *Le Monde Diplomatique* en octobre-novembre 2015.

Il doit être résumé en 150 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Le poids du secteur informel

Difficile à quantifier par nature, l'économie informelle occupe une place centrale dans toutes les sociétés africaines. Peu de gouvernements s'y attaquent, parce qu'elle fonctionne comme un amortisseur social et correspond à une vision particulière des rapports humains. Cependant, certaines activités font l'objet de tentatives de « formalisation ».

Par définition, le secteur informel — l'autre nom donné au « marché noir » en Afrique et en Asie — échappe à toute statistique. S'il est difficile à mesurer, son importance est indéniable : il représenterait près de 55 % du produit intérieur brut (PIB) cumulé de l'Afrique subsaharienne, selon la Banque africaine de développement (1). De manière plus détaillée, l'Agence française de développement a relevé en 2006, après enquête sur le terrain, que 90 % des personnes actives exercent dans l'informel au Cameroun et au Sénégal, contre 80 % en Afrique du Sud, 50 % en Ethiopie et moins de 40 % au Maroc (2).

Qui sont-ils ? Commerçants, artisans, couturiers, ferrailleurs, mécaniciens, plombiers, maçons, chauffeurs, taxis… Souvent appris sur le tas, ces métiers représentent une véritable planche de salut pour la majorité. C'est le seul moyen de gagner sa vie, en gérant l'argent frais qui transite de main en main, hors de toute fiscalité.

Autre indicateur de l'importance du secteur informel : le faible taux de bancarisation qui persiste en Afrique subsaharienne (pas plus de 20 % selon la Banque mondiale). Ceux qui n'ont pas de compte gèrent autrement leurs flux financiers, par le biais d'une épargne elle aussi informelle. Il s'agit des fameuses « tontines », ces pots communs dont l'intégralité bénéficie successivement à chacun des participants, sous des formes parfois non financières — avec des biens immobiliers et du bétail.

Comme le relève l'économiste Kako Nubukpo, chercheur invité à Oxford, le secteur informel *« n'est pas clairement séparé du secteur formel* (3) ». Des entreprises de construction dûment enregistrées ont recours à des sous-traitants non fiscalisés, par exemple. Des fonctionnaires mal payés arrondissent leurs fins de mois en exerçant le soir une autre activité, informelle, zémidjan (taxi-moto) ou épicier…

Le secteur informel n'est pas vraiment combattu par les pouvoirs en place, malgré les nombreuses injonctions des institutions financières internationales, car il sert d'« amortisseur » social. *« Il permet d'atténuer les chocs externes subis par le secteur formel, le plus souvent un secteur privé de petite taille tourné vers les exportations,* nous explique Nubukpo. *La vitalité du secteur informel s'explique aussi par l'immersion de ses pratiques dans les aspects socioculturels de chaque pays — proximité, solidarité, liens sociaux forts, sentiment d'appartenance familiale, ethnique, clanique, etc. »*

La coexistence d'un immense secteur informel aux côtés d'un secteur formel plus réduit aboutit à une forme de schizophrénie économique, selon Mahamadou Lamine Sagna, ancien professeur d'économie à Princeton (Etats-Unis) et spécialiste du rapport à l'argent dans les sociétés subsahariennes. *« On observe une coupure, voire un morcellement du corps social : dans l'économie formelle, on trouve une Afrique moderne, aisée, sophistiquée et mondialisée, qui vit à l'heure du XXIe siècle. Dans le secteur informel, en revanche, se renforcent des logiques traditionnelles parfois féodales, autour d'une solidarité organique que l'on ne retrouve ni dans la logique financière occidentale, ni dans les services des banques classiques* (4). »

Très rares sont les pays d'Afrique qui donnent l'exemple en matière de lutte contre le secteur informel. Le Rwanda est l'un des rares à se distinguer dans ce domaine : depuis 2006, les petites et moyennes entreprises sont incitées à tenir des registres comptables et à payer les taxes. Selon une enquête gouvernementale effectuée en 2006, le secteur informel non agricole (14,5 % du PIB) comprend des entreprises opérant dans les mines (0,78 %), les manufactures (13 %), mais surtout les services (86 %). Il concerne 27 % des actifs et est constitué à 72 % de personnes ayant créé leur propre emploi — des hommes, majoritairement (71 %), qui gagnent 40 euros par mois en moyenne, à raison de cinquante heures de travail par semaine.

L’enquête a souligné les fortes réticences de ces opérateurs à aller dans le secteur formel, par crainte de « tracasseries avec les pouvoirs publics » (73 % des réponses). Sur la base de ces informations, des politiques ciblées ont été mises en place pour souligner les avantages du secteur formel, notamment en termes d’accès au crédit.

Ailleurs, c’est plutôt le secteur privé qui prend l’initiative. Au Cameroun, l’homme d’affaires Paul Fokam a monté Afriland First Bank, un empire bancaire à l’échelle de l’Afrique centrale, en commençant par un vaste réseau de microfinance. Au Kenya, le banquier James Mwangi, issu d’une famille rurale très modeste, a été le premier Africain à être désigné entrepreneur de l’année, en 2012, par le cabinet Ernst & Young. En 1993, il a racheté Equity Bank, une société de microfinance qui était au bord de la faillite, et il en a fait, en mettant l’accent sur les relations humaines (rapports avec ses employés et ses clients), la première banque généraliste d’Afrique de l’Est, avec huit millions de comptes au Kenya, au Rwanda, en Ouganda, en Tanzanie et au Soudan du Sud.

Une leçon qu’a bien comprise le jeune banquier ivoirien Jean-Luc Konan, 42 ans, qui a fondé en 2013 la Compagnie financière africaine (Cofina) à Abidjan et Dakar, pour desservir en crédit ce qu’il estime être un immense marché. *« C’est là, dans ces 80 % d’opérateurs ignorés par les grandes banques, que se trouvent les multinationales africaines et les champions de demain* (5) *»,* explique cet entrepreneur africain qui a financé trois mille dossiers en moins de deux ans, pour un encours de 30 millions d’euros.

Sabine Cessou, Journaliste.

(1) Perspectives économiques en Afrique 2014, www.africaneconomicoutlook.org

(2) Voir les rapports d’enquête effectués en Afrique du Sud, en Angola, au Bénin, au Cameroun, au Maroc et au Sénégal, publiés en 2006 par l’Agence française de développement.

(3) Entretien réalisé en 2014. Voir aussi Kako Nubukpo, *L’Improvisation économique en Afrique. Du coton au franc CFA,* Karthala, coll. « Les Afriques », Paris, 2011.

(4) Mahamadou Lamine Sagna, « Pourquoi l’épargne informelle échappe-t-elle aux banques ? », *Géopolitique africaine* n° 53-54, Paris, pp. 187-194.

(5) Jean-Luc Konan, « Il faut soutenir les champions de demain », *Afrique Méditerranée Business,* n° 9, Paris, juillet-août 2015.